آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **هندسه ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۱۰/۰۷**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۱	**جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.** الف) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، در این‌صورت، مقدار m برابر ..... است. ب) اگر A ماتریس ۳×۳ باشد و $\lvert A\rvert=۵$، در این‌صورت، حاصل $\lVert A\rvert A\rVert$ برابر ..... است. پ) نقطهٔ $A(-۱,-۲)$ ..... دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ قرار دارد. (خارج – داخل – روی محیط) ت) اگر معادلهٔ $x^۲+y^۲-۳x+۵y+k=۰$، معادلهٔ یک دایره باشد، آن‌گاه حدود k برابر ..... است.	۲
۲	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** الف) هر ماتریس قطری، یک ماتریس اسکالر است. ب) اگر $A=\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر ۱ است. پ) مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند، یک خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است. ت) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک حاصل، سهمی خواهد بود.	۲
۳	اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به‌صورت زیر باشد، ابتدا ماتریس A و B را با درایه‌هایشان بنویسید و سپس حاصل B×A را به‌دست آورید. $a_{ij}=\begin{cases} i^۲-j & i=j \\ ۲i+j & i>j \\ j-۲i & i<j \end{cases}$ $b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j-۱ & i>j \\ i-j & i<j \end{cases}$	۱/۵
۴	معادلهٔ $\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -۱ \end{bmatrix}=۰$ را حل کنید.	۰/۷۵
۵	اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس A+B را به‌دست آورید.	۱
۶	اگر $A=\begin{bmatrix} ۵\lvert A\rvert & \lvert A\rvert \\ ۳ & ۴\lvert A\rvert \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر باشد، در این صورت، حاصل $(\lvert A\rvert-۱)$ را بیابید.	۱/۲۵
۷	به ازای چه مقادیری از m، دستگاه $\begin{cases} ۲x+my=-m \\ (m-۱)x+y=m-۳ \end{cases}$ فاقد جواب است؟	۱/۷۵
	ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ بعد	

شبیه‌ساز امتحانات نهایی
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **هندسه ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۱۰/۰۷**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
۸	دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A و B به یک فاصله بـوده و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید.)	۱/۵
۹	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $۲x+y=۲$ وتری به طول ۴ جدا کند.	۱/۵
۱۰	نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ رئوس مثلث ABC هستند: الف) معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بنویسید. ب) معادلهٔ خط مماس بر این دایره را در رأس A به‌دست آورید.	۲/۵
۱۱	وضعیت خط $x-y=۱$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۳=۰$ را نسبت به‌هم مشخص کنید.	۱/۵
۱۲	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O'(-۱,۳)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y=۳۱$ مماس داخل باشد.	۲/۷۵
	موفق باشید.	۲۰

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **هندسه ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **۱۴۰۲/۱۰/۰۷**	مدت امتحان: **۴۰ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۱۶ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره
۱	مصحح شو:	۲

الف) ۲ (۰/۵)　　ب) ۶۲۵ (۰/۵)　　پ) خارج (۰/۵)　　ت) $k<\frac{17}{2}$ (۰/۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) می‌دانیم که اگر ماتریس A وارون‌پذیر نباشد، $|A|=0$ است، پس:

$$A=\begin{bmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{|A|=0} 2m-4=0 \Rightarrow 2m=4 \Rightarrow m=2$$

ب) می‌دانیم که A، ماتریس 3×3 و $|A|=5$ است، پس:

$$||A|A|=|A|^3\times|A|=|A|^4=(5)^4=625$$

پ) ابتدا مختصات مرکز دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ و همچنین اندازهٔ شعاع آن را به‌دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) \Rightarrow O(-\frac{-2}{2},-\frac{2}{2}) \Rightarrow O(1,-1)$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} \Rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8}=\sqrt{2}$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ $A(-1,-2)$ را از مرکز دایره به‌دست می‌آوریم:

$$OA=\sqrt{(-1-1)^2+\big(-2-(-1)\big)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

با توجه به اینکه $OA>R$ است، نتیجه می‌گیریم که نقطهٔ A، **خارج** دایره قرار دارد.

ت) می‌دانیم که معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در صورتی معادلهٔ یک دایره است که $a^2+b^2-4c>0$ باشد، پس:

$$x^2+y^2-3x+5y+k=0 \Rightarrow (-3)^2+(5)^2-4(k)>0 \Rightarrow 9+25-4k>0 \Rightarrow 4k<34 \Rightarrow k<\frac{17}{2}$$

الف) شرط وارون‌پذیری یک ماتریس:

شرط لازم و کافی برای اینکه A^{-1} وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) این است که $|A|\neq0$ باشد.

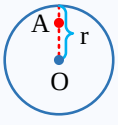
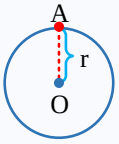
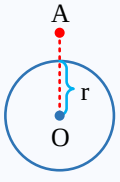
ب) یک ویژگی مهم از دترمینان:

اگر A یک ماتریس $n\times n$ و k عددی حقیقی باشد، داریم:

$$|kA|=k^n|A|$$

پ) وضعیت نقطه با دایره:

برای مشخص کردن وضعیت نقطه‌ای مانند A با دایره، ابتدا فاصلهٔ مرکز دایره را از نقطهٔ A پیدا می‌کنیم و سپس به کمک جدول زیر وضعیت آن را با دایره تعیین می‌کنیم:

		
نقطهٔ A درون دایره است.	نقطهٔ A روی دایره است.	نقطهٔ A بیرون دایره است.
$OA<r$	$OA=r$	$OA>r$

یادآوری: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ از هم برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

ت) شرط دایره بودن:

شرط دایره بودن یک رابطهٔ ضمنی به فرم $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ است:

ـ اگر $a^۲+b^۲>۴c$ باشد، این رابطه مربوط به دایره‌ای به شعاع $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ و به مرکز $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ است.

ـ اگر $a^۲+b^۲=۴c$ باشد، این رابطه مربوط به یک نقطه به مختصات $\left(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲}\right)$ است.

ـ اگر $a^۲+b^۲<۴c$ باشد، این رابطه هیچ نقطه‌ای را در صفحه مشخص نمی‌کند.

۲

۲

مصحح شو:

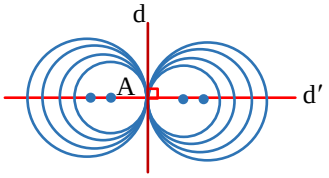
الف) نادرست (۰/۵)　　ب) نادرست (۰/۵)　　پ) درست (۰/۵)　　ت) نادرست (۰/۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف) توجه داشته باشید که در یک ماتریس قطری، درایه‌های روی قطر اصلی لزوماً یکسان نیستند، پس گزارهٔ «الف» نادرست است.

ب) $A=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \cos\alpha & -\sin\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha=-\underbrace{(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)}_{۱}=-۱$

پ) مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند، یک خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است. ببینید:



ت) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک حاصل، بیضی خواهد بود.

۱) معرفی چند ماتریس:

ـ **ماتریس مربعی:** اگر در یک ماتریس تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، آن را یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n می‌گوییم.

ـ **ماتریس سطری:** اگر یک ماتریس فقط از یک سطر تشکیل شده باشد آن را یک ماتریس سطری می‌گوییم.

ـ **ماتریس ستونی:** اگر یک ماتریس فقط از یک ستون تشکیل شده باشد آن را یک ماتریس ستونی می‌گوییم.

ـ **ماتریس قطری:** اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند آن را ماتریس قطری می‌گوییم. (درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند).

$$A=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

ـ **ماتریس اسکالر:** اگر یک ماتریس، قطری باشد و تمام داریه‌های روی قطر اصلی آن باهم برابر باشند آن را ماتریس اسکالر می‌گوییم.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}۳\end{bmatrix}$$

ـ **ماتریس صفر:** به ماتریسی که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر می‌گوییم و آن را با نماد $\bar{O}$ نمایش می‌دهیم.

ـ **ماتریس بالامثلثی:** اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های زیر قطر اصلی برابر صفر باشند آن را ماتریس بالامثلثی می‌گوییم.

ـ **ماتریس پایین مثلثی:** اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر باشند آن را ماتریس پایین مثلثی می‌گوییم.

$$B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۴ & ۲\end{bmatrix}$$
«ماتریس پایین مثلثی»

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\\ ۰ & ۳ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$
«ماتریس بالامثلثی»

ـ **ماتریس همانی:** اگر در یک ماتریس اسکالر تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ باشند آن را ماتریس همانی یا ماتریس واحد می‌نامیم و آن را با I نمایش می‌دهیم.

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

$$I_۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix} \qquad I_۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix} \qquad I_۱=[۱]$$

مثال: اگر ماتریس $\begin{bmatrix}r & m-۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ را بیابید.

$$\begin{cases}r=۱\\ m-۱=۰\Rightarrow m=۱\end{cases}\Rightarrow m+r=۱+۱=۲$$

مثال: در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ m-۱ & ۴\end{bmatrix}$ مقدار m چقدر است؟

$$m-۱=۰\Rightarrow m=۱$$

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ باهم برابرند اگر و تنها اگر درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

مثال: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x-۱ & ۸\\ ۳ & z+۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}y+۱ & x-۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $(x+y+z)$ را بیابید.

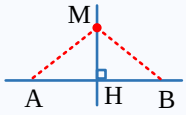
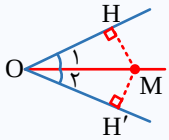
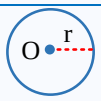
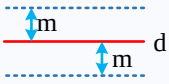
$$\begin{cases}x-۲=۸\Rightarrow x=۱۰\\ y+۱=x-۱\Rightarrow y=x-۲\xrightarrow{x=۱۰}y=۱۰-۲=۸\\ z+۱=۴\Rightarrow z=۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y+z=۱۰+۸+۳=۲۱$$

۲) مکان هندسی:

به مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا که همهٔ آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد، مکان هندسی می‌گوییم.

مکان هندسی‌های مهم:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت مانند O به فاصلهٔ ثابت r قرار داشته باشند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت m قرار داشته باشند، دو خط راست موازی با خط d هستند که به فاصله m در دو طرف آن قرار گرفته‌اند.	

مثال: مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید.

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند. (نیمساز زوایای بین دو خط d و d')

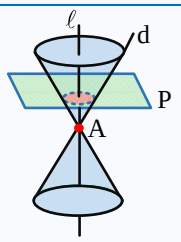
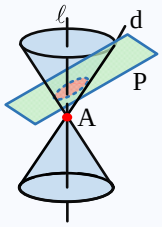
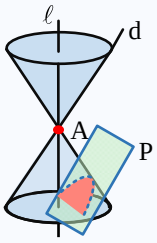
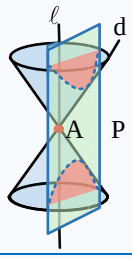
ب) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند. (خطی عمود بر d در نقطهٔ A)

پ) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند. (دو خط موازی با d و به فاصلهٔ r از آن)

ت) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایرهٔ $C(O,r)$ در صفحهٔ این دایره مماس خارجی‌اند. (دایره‌هایی به مرکز O و شعاع $۲r$)

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

۳) مقاطع مخروطی:

دایره	بیضی	سهمی	هذلولی
صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند.	صفحهٔ P بر محور ℓ عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند.	صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند.	صفحهٔ P هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور L نباشد.
			
حالت‌های دیگر			
اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی تنها شامل یک نقطه است.	اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی تنها شامل یک نقطه است.	اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور کند فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک خط است.	اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند و هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروط را قطع کند، فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی دو خط متقاطع است.

۳ ۱/۵

مصحح شو:

ابتدا ماتریس‌های A و B را تشکیل می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix}(۱)^۲-۱ & ۲-۲(۱)\\ ۲(۲)+۱ & (۲)^۲-۲\\ ۲(۳)+۱ & ۲(۳)+۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۵ & ۲\\ ۷ & ۸\end{bmatrix}\quad(۰/۵)$$

$$B=\begin{bmatrix}(۱)^۲+۱ & ۱-۲ & ۱-۳\\ ۲+۱-۱ & (۲)^۲+۱ & ۲-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & -۲\\ ۲ & ۵ & -۱\end{bmatrix}\quad(۰/۵)$$

بنابراین، حاصل خواسته شده برابر است با:

$$BA=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & -۲\\ ۲ & ۵ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۵ & ۲\\ ۷ & ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۹ & -۱۸\\ ۱۸ & ۲\end{bmatrix}\quad(۰/۵)$$

ماتریس:

۱) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی را که شامل تعدادی سطر و ستون باشد یک ماتریس می‌گوییم.

۲) هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌گوییم.

۳) در حالت کلی، اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد آن را به‌صورت $A_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم و می‌گوییم A ماتریسی از مرتبه $m\times n$ است.

۴) برای هر درایه ماتریس دو اندیس تعریف می‌کنیم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن را مشخص می‌کند، به‌عبارت دیگر a_{ij} یعنی درایه روی سطر i ام و ستون j ام.

۵) اگر ماتریس A را به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش دهیم در این‌صورت به a_{ij}، درایه عمومی ماتریس A می‌گوییم که در آن $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$ تغییر می‌کند.

مثال: اگر ماتریس A به‌صورت $A=[۳i-۲j]_{۳\times ۳}$ باشد، آن را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

$$A=\begin{bmatrix}۳-۲ & ۳-۴ & ۳-۶\\ ۶-۲ & ۶-۴ & ۶-۶\\ ۹-۲ & ۹-۴ & ۹-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & -۳\\ ۴ & ۲ & ۰\\ ۷ & ۵ & ۳\end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس A به‌صورت $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases}i+j & i=j\\ j & i>j\\ ۰ & i<j\end{cases}$ است. این ماتریس را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۴ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۶\end{bmatrix}$$

ـ در درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$، $i=j$ است.

ـ در درایه‌های $a_{۱۲}$، $a_{۱۳}$ و $a_{۲۳}$، $i<j$ است.

ـ در درایه‌های $a_{۲۱}$، $a_{۳۱}$ و $a_{۳۲}$، $i>j$ است.

ضرب ماتریس‌ها:

در حالت کلی دو ماتریس A و B زمانی ضرب‌پذیر هستند که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد، به‌عبارت دیگر:

$$A_{m\times p}\times B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

(↓ برابر ↓)

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی: اگر A ماتریس سطری و B ماتریس ستونی باشد، برای پیدا کردن حاصل $A\times B$، کافی است هر درایه ماتریس A را در درایه نظیرش در ماتریس B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم. ببینید:

$$A\times B=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{۱۱}\\ b_{۲۱}\\ \vdots\\ b_{n۱}\end{bmatrix}=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\dots a_{۱n}b_{n۱}$$

ضرب ماتریس در ماتریس: ماتریس $A_{m\times p}$ و $B_{p\times n}$، مفروضند. حاصل $A\times B$ ماتریسی مانند $C_{m\times n}$ است که هر درایه آن از ضرب یک سطر ماتریس A در یک ستون ماتریس B به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر:

$$\text{درایه سطر } i \text{ ام و ستون } j \text{ ام ماتریس } C=[\text{سطر } i \text{ ام ماتریس } A]\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j \text{ ام}\\ \text{ماتریس } B\end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

حال برای اینکه ماتریس حاصل، ماتریسی قطری باشد، باید:

$$\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها:

۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$AB\neq BA$$

۲) اگر A ماتریس مربعی مرتبه n و I ماتریس واحد (همانی) مرتبه n باشد، آن‌گاه ماتریس I عضو خنثی برای عمل ضرب است. به‌عبارت دیگر:

$$AI=IA=A$$

۳) ضرب ماتریس A در $(B\pm C)$، خاصیت توزیع‌پذیری یا پخش را دارد:

$$A(B\pm C)=AB\pm AC$$

۴) ضرب ماتریس A در (BC)، خاصیت شرکت‌پذیری را دارد:

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

$A(BC)=(AB)C$

۵) در حالت کلی، قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، به‌عبارت دیگر اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم: $AB=AC$ ، آن‌گاه لزوماً $B=C$ نیست.

توان در ماتریس:

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، توان‌های صحیح و نامنفی آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{0}=I$$

$$A^{1}=A$$

$$A^{2}=A\times A$$

$$A^{3}=A\times A^{2}=A^{2}\times A$$

$$A^{4}=A\times A^{3}=A^{3}\times A=A^{2}\times A^{2}$$

$$\vdots$$

$$A^{n}=A\times A^{n-1}=A^{n-1}\times A=\dots$$

ویژگی‌های توان در ماتریس: اگر A یک ماتریس مربعی باشد، داریم:

$$A^{m}\times A^{n}=A^{n}\times A^{m}=A^{(m+n)}$$

$$(A^{m})^{n}=(A^{n})^{m}=A^{mn}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&3\\-1&2&1\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{2} را به‌دست آورید.

$$A^{2}=A\times A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&3\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&3\\-1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&6\\-3&7&6\\-2&2&7\end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{7} را به‌دست آورید.

$$A^{2}=\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=-2I$$

$$A^{7}=(A^{2})^{3}\times A=(-2I)^{3}\times A=-8\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-16\\8&0\end{bmatrix}$$

مثال: اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\2&1&0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}a+b&2&2\\2&2&-1\\2&-1&4a+b\end{bmatrix}$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^{2}-B=\bar{O}$

($\bar{O}$ ماتریس صفر است.)

$$A^{2}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2&2\\2&2&-1\\2&-1&5\end{bmatrix}$$

$$A^{2}-B=\bar{O}\Rightarrow A^{2}=B\Rightarrow\begin{bmatrix}5&2&2\\2&2&-1\\2&-1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b&2&2\\2&2&-1\\2&-1&4a+b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=5\\4a+b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=5\end{cases}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}0&4\\2&1\end{bmatrix}$ باشد، مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه $A^{2}=mA+nI_{2}$ برقرار باشد.(I_{2} ماتریس همانی است.)

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 2 & 9\end{bmatrix}$$

$$mA+nI_2=m\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4m\\ 2m & m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & 4m\\ 2m & m+n\end{bmatrix}$$

می‌دانیم که رابطه $A^2=mA+nI_2$ باید برقرار باشد، یعنی:

$$\begin{bmatrix}8 & 4\\ 2 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & 4m\\ 2m & m+n\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}n=8\\ m=1\end{cases}$$

دو ماتریس تعویض‌پذیر:

می‌دانیم که در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد، حال اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند و $AB=BA$ باشد، در این‌صورت دو ماتریس A و B تعویض‌پذیرند.

حال اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، در این‌صورت:

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$$

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$

مثال: اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید: $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2\xrightarrow[AB=BA]{A\text{ و }B\text{ تعویض‌پذیرند}}A^2-2AB+B^2$$

مثال: اگر $A^2=A$ باشد، در این‌صورت ثابت کنید: $(A+I)^2=I+3A$

می‌دانیم که A و I تعویض‌پذیرند، بنابراین:

$$(A+I)^2=(A+I)(A+I)=A^2+AI+IA+I^2=A^2+2A+I\xrightarrow[\text{می‌دانیم}]{A^2=A}A+2A+I=3A+I$$

مثال: اگر ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد، حاصل $\begin{bmatrix}x & 2 & -y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -x\end{bmatrix}$ را بیابید.

می‌دانیم که ضرب ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر است، یعنی: $AB=BA$

$$\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4x+3y & 3x+4y\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+6 & 4y-3\\ 3x+8 & 3y-4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x+8=5\Rightarrow x=-1\\ 3y-4=2\Rightarrow y=2\end{cases}$$

حال حاصل خواسته شده برابر است با:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=-2+4-2=0$$

---

۴ — ۰/۷۵

مصحح شو:

$$\begin{bmatrix}x & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -1\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}x+6 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -1\end{bmatrix}=0\ (0/25)$$

$$\Rightarrow\underbrace{x^2+6x+9=0}_{(0/25)}\Rightarrow(x+3)^2=0\Rightarrow x=-3\ (0/25)$$

---

۵ — ۱

مصحح شو:

ابتدا ماتریس $A+B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A+B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 4\\ -4 & 6\end{bmatrix}\ (0/25)$$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

حال برای پیدا کردن وارون ماتریس $A+B$ داریم:

$$|A+B|=(-۴)(۶)-(۴)(-۴)=-۲۴+۱۶=-۸ \quad (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{(A+B)^{-۱}=\frac{۱}{-۸}\begin{bmatrix}۶ & -۴\\ ۴ & -۴\end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix} \quad (۰/۲۵)$$

۱) جمع و تفریق ماتریس‌ها:

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است که درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم.

۲) ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس:

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس A، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب می‌کنیم.

۳) قرینه یک ماتریس:

اگر A یک ماتریس دلخواه باشد، قرینه ماتریس A از ضرب عدد (-۱) در ماتریس A به‌دست می‌آید که آن را با $(-A)$ نشان می‌دهیم.

٤) برخی از خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس:

اگر A و B و C ماتریس‌های هم‌مرتبه و r و s اعدادی حقیقی باشند، داریم:

$$A+B=B+A$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C$$
$$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$$
$$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$$
$$(r\pm s)A=rA\pm sA$$
$$r(A\pm B)=rA\pm rB$$
$$rA=rB, r\neq ۰\Rightarrow A=B$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & m+۱\\ ۲n+۴ & ۵\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد با محاسبه m و n ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است.)

$$\begin{cases}m+۱=۰\Rightarrow m=-۱\\ ۲n+۴=۰\Rightarrow n=-۲\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}$$

$$A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۶\end{bmatrix}$$

۵) وارون ماتریس:

برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی مانند B است به‌طوری که:

$$A\times B=B\times A=I$$

در این‌صورت، ماتریس B را وارون ماتریس A می‌گوییم و آن را با $A^{-۱}$ نمایش می‌دهیم. حال اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، در این‌صورت وارون ماتریس A (یعنی $A^{-۱}$) از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

توجه: شرط لازم و کافی برای اینکه $A^{-۱}$ وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) این است که $|A|\neq ۰$ باشد.

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A-۲I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است.)

$$A-۲I=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$|A-۲I|=۲$$

$$(A-۲I)^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}$ باشد، حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید.

$$|A|=۲۰-۶=۱۴\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow ۲A^{-۱}=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}$$

$$|B|=۲-(-۱۵)=۱۷\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ -۵ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow ۳B^{-۱}=\frac{۳}{۱۷}\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ -۵ & -۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (۲A^{-۱}-۳B^{-۱})=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۷} & -\frac{۳}{۷}\\ -\frac{۲}{۷} & \frac{۴}{۷}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۱۷} & \frac{۹}{۱۷}\\ -\frac{۱۵}{۱۷} & -\frac{۶}{۱۷}\end{bmatrix}$$

۶) ویژگی وارون ماتریس:

اگر A ماتریسی مربعی و وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$(A^{-۱})^{-۱}=A$$

$$(kA)^{-۱}=\frac{۱}{k}A^{-۱}$$

$$(A^{n})^{-۱}=(A^{-۱})^{n}$$

$$(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$$

مثال: ماتریس $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس A را به‌دست آورید.

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow |A^{-۱}|=۶-(-۲)=۸$$

می‌دانیم که $(A^{-۱})^{-۱}=A$ است، پس وارون ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست بیاوریم:

$$(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۸} & \frac{۱}{۸}\\ -\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴}\end{bmatrix}$$

۷) حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با استفاده از ماتریس وارون:

در حالت کلی هر دستگاه دو معادله و دو مجهولی به‌صورت $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ را می‌توان به شکل زیر نمایش داد که در آن $A=\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}$ را ماتریس ضرایب، $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ را ماتریس مجهولات و $B=\begin{bmatrix}c\\ c'\end{bmatrix}$ را ماتریس مقادیر معلوم می‌گوییم، ببینید:

$$\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}c\\ c'\end{bmatrix}}_{B}\Rightarrow AX=B$$

حال برای حل معادله ماتریسی $AX=B$، (به شرطی که A ماتریسی وارون‌پذیر باشد ($|A|\neq ۰$))، با ضرب $A^{-۱}$ از سمت چپ در معادله $AX=B$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

می‌توان مجهولات را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$AX=B \xrightarrow[\text{از سمت چپ}]{\times A^{-1}} A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (\underbrace{A^{-1}A}_{I})X=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

مثال: دستگاه $\begin{cases}3x-5y=-1\\ 2x+y=8\end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

$$A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=3+10=13 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-1\\ 8\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}B \Rightarrow X=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 8\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-1+40\\ 2+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$$

۶ — ۱/۲۵

مصحح شو:

$$A=\begin{bmatrix}5|A| & |A|\\ 3 & 4|A|\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=20|A|^2-3|A| \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow 20|A|^2-4|A|=0 \Rightarrow |A|(20|A|-4)=0 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}|A|=0 \text{ غ ق ق} & (0/25)\\ 20|A|-4=0 \Rightarrow |A|=\frac{4}{20}=\frac{1}{5} & (0/25)\end{cases}$$

در نتیجه حاصل خواسته شده برابر است با: $1-|A|=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ $(0/25)$

دترمینان:

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی را نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. حال اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد $(1\le n\le 3)$ در این‌صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$A=[k]_{1\times 1} \Rightarrow |A|=k$$

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر اول}} |A|=a\begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix}$$

توجه: برای محاسبه دترمینان ماتریس 3×3 در روش فوق، بسط را برحسب هر سطر یا هر ستون دلخواه می‌توان انجام داد.

مثال: دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید:

$$A=[-3] \Rightarrow |A|=-3$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(-10)-12=-22$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر اول}} |A|=2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}+(0)\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2(15)-(-9)=39$$

چند نکته:

۱) دترمینان هر ماتریس قطری، بالامثلثی و پایین مثلثی با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی، برابر است.

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{vmatrix} = abc$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ برابر است با: $|A| = 2 \times (-3) \times 5 = -30$

۲) اگر دو ماتریس مربعی با هم برابر باشند، دترمینان آن‌ها هم با هم برابر است. $A = B \Rightarrow |A| = |B|$

۳) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، داریم: $|AB| = |BA| = |A||B|$

۴) اگر A ماتریسی مربعی باشد داریم: $|A^m| = |A|^m$

۵) اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد،داریم: $|kA| = k^n |A|$

۶) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه: $|A| = -abc$

۷) اگر A ماتریسی مربعی و وارون‌پذیر باشد، داریم: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

مثال: اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ باشد، در این‌صورت حاصل $|A^{-1}|$ را بیابید.

ابتدا دترمینان ماتریس $2A$ را پیدا می‌کنیم:

$$|2A| = (|A|^2 + 4) \xrightarrow[|2A| = (2)^2 |A|]{A \text{ ماتریسی } 2 \times 2} |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

حال حاصل $|A^{-1}|$ برابر است با: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$

---

۷ — ۱/۷۵

مصحح شو:

می‌دانیم که معادله داده شده تنها در صورتی فاقد جواب است که: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ (۰/۲۵)

$$\begin{cases} 2x + my = -m \\ (m-1)x + y = m - 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{m-1} = \frac{m}{1} \neq \frac{-m}{m-3} \quad (0/25)$$

$$\underbrace{\frac{2}{m-1} = m \Rightarrow m(m-1) = 2}_{(0/25)} \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \ (0/25) \\ m = 2 \ (0/25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -1 : \frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-(-1)}{-1-3} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \text{(۰/۲۵) دستگاه فاقد جواب است.} \\ m = 2 : \frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = \frac{-2}{2-3} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \text{(۰/۲۵) دستگاه بی‌شمار جواب دارد.} \end{cases}$$

بنابراین تنها $m = -1$ قابل قبول است.

یادگیری بیشتر:

یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادله یک خط هستند. حال اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$، ماتریس ضرایب این دستگاه باشد، داریم:

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	دو خط متقاطع هستند.	$\lvert A\rvert \neq 0$	دستگاه یک جواب یکتا دارد.	
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	دو خط موازی هستند.	$\lvert A\rvert = 0$	دستگاه هیچ جوابی ندارد.	
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	دو خط بر هم منطبق هستند.	$\lvert A\rvert = 0$	دستگاه بی‌شمار جواب دارد.	

مثال: مقدار m را چنان بیابید که دستگاه: $\begin{cases} mx+3y=-3 \\ 4x+(m+4)y=2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

می‌دانیم شرط اینکه دستگاه فوق جواب نداشته باشد این است که $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد:

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{m+4} \neq \frac{-3}{2}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{m+4} \Rightarrow m(m+4)-12=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-6 \\ m=2 \end{cases}$$

$$\frac{3}{m+4} \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow m \neq -6$$

بنابراین تنها $m=2$ قابل قبول است.

۸ — ۱/۵

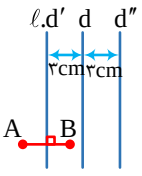
مصحح شو:

مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است. این خط را رسم می‌کنیم و آن را ℓ می‌نامیم. (۰/۲۵) مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند دو خط d' و d'' می‌باشند که موازی d هستند. (۰/۲۵) محل برخورد دو خط d' و d'' با خط ℓ جواب مسئله است.

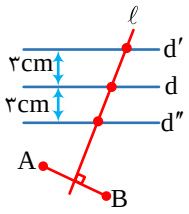
الف) اگر خط ℓ دو خط d' و d'' را قطع کند، مسئله دو جواب دارد. (۰/۲۵)

ب) اگر خط ℓ بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد. (۰/۲۵)

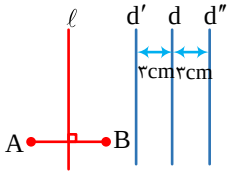
پ) اگر خط ℓ هیچ‌یک از دو خط d' و d'' را قطع نکند، مسئله جواب ندارد. (۰/۲۵)



«بی‌شمار جواب»



«دو جواب»



«جواب ندارد»

رسم حداقل یک مورد شکل برای مسئله: (۰/۲۵)

۹ — ۱/۵

مصحح شو:

ابتدا فاصله نقطه $O(-1,-1)$ را از خط $2x+y-2=0$ به‌دست می‌آوریم.

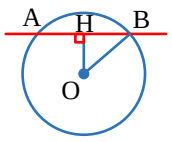
$$OH = \frac{\lvert 2(-1)+(-1)+(-2)\rvert}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}} = \frac{\lvert -2-1-2\rvert}{\sqrt{4+1}} = \frac{\lvert -5\rvert}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad (0/25)$$

می‌دانیم که طول وتر جدا شده برابر ۴ است، بنابراین مطابق شکل زیر داریم:

$$AB=4 \Rightarrow AH=HB=2 \quad (0/25)$$

$$\overset{\triangle}{OHB}: (OB)^2 = (OH)^2 + (HB)^2 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow (OB)^2 = (\sqrt{5})^2 + (2)^2 \Rightarrow (OB)^2 = 5+4=9 \Rightarrow OB = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow R=3 \quad (0/25)$$



شبیه‌ساز امتحانات نهایی

بنابراین معادله دایره برابر است با: $\begin{cases} O(-1,-1) \\ R=3 \end{cases} \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow \underbrace{(x+1)^2+(y+1)^2=9}_{(0/5)}$

راهنمای مصحح: اگر معادله دایره به‌صورت گسترده و به فرم $x^2+y^2+2x+2y-7=0$ نوشته شود، به آن قسمت، نمره تعلق می‌گیرد.

یادگیری بیشتر:

۱) اگر $O(\alpha,\beta)$ مختصات مرکز دایره و r شعاع آن دایره باشد، معادله استاندارد دایره برابر است با: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

مثال: اگر معادله دایره به‌صورت $(x+1)^2+y^2=4$ باشد، مطلوب است:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره:

$$(x+1)^2+(y-0)^2=(2)^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=0 \\ r=2 \end{cases} \Rightarrow O(-1,0)$$

ب) مختصات تقاطع دایره با محور xها و محور yها:

برای پیدا کردن مختصات نقاط تقاطع دایره با محور xها باید در معادله دایره، $y=0$ قرار دهیم که در این‌صورت:

$$(x+1)^2+y^2=4 \xrightarrow{y=0} (x+1)^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \Rightarrow x=1 \\ x+1=-2 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

در نتیجه نقاط $(-3,0)$ و $(1,0)$ محل تقاطع دایره با محور xها هستند و برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور yها، باید در معادله دایره، $x=0$ را قرار دهیم:

$$(x+1)^2+y^2=4 \xrightarrow{x=0} 1+y^2=4 \Rightarrow y^2=3 \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$$

پس نقاط $(0,\sqrt{3})$ و $(0,-\sqrt{3})$ محل تقاطع دایره با محور yها هستند.

۲) اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله گسترده (ضمنی) یک دایره باشد، داریم:

مختصات مرکز دایره: $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$

شعاع دایره: $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

مثال: معادله گسترده دایره‌ای به‌صورت $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ می‌باشد، مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

$$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) \Rightarrow O(-\frac{-6}{2},-\frac{2}{2}) \Rightarrow O(3,-1)$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} \Rightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(2)^2-4(6)}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$$

در مثال فوق، معادله دایره را به‌صورت استاندارد بنویسید:

$$\begin{cases} O(3,-1) \\ r=2 \end{cases} \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow (x-3)^2+\big(y-(-1)\big)^2=4 \Rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=4$$

۱۰ — ۲/۵

مصحح شو:

الف) فرض می‌کنیم که $O(\alpha,\beta)$، مرکز دایره محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد، پس:

$$OA=OB \Rightarrow \sqrt{(-1-\alpha)^2+(-1-\beta)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow (1+2\alpha+\alpha^2)+(1+2\beta+\beta^2)=(1-2\alpha+\alpha^2)+(1-2\beta+\beta^2)$$

$$\Rightarrow 4\alpha+4\beta=0 \Rightarrow \alpha+\beta=0 \Rightarrow \alpha=-\beta \quad (0/25)$$

از طرفی:

$$OB=OC \Rightarrow \sqrt{(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(-3-\beta)^2} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow 1-2\beta+\beta^2=9+6\beta+\beta^2 \Rightarrow 8\beta=-8 \Rightarrow \underbrace{\beta=-1}_{(0/25)} \xrightarrow{\alpha=-\beta} \underbrace{\alpha=1}_{(0/25)}$$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

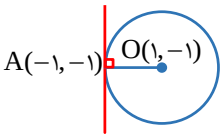
بنابراین مرکز دایره محیطی به‌صورت $O(۱,-۱)$ است. حال برای به‌دست آوردن شعاع دایره، داریم:

$$OA = R = \sqrt{(-۱-\alpha)^۲ + (-۱-\beta)^۲} = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (-۱+۱)^۲} = \sqrt{۴} = ۲ \quad (۰/۵)$$

در نتیجه معادله دایره برابر است با:

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۴ \quad (۰/۲۵)$$

ب) با توجه به شکل مقابل، چون عرض دو نقطه O و A با هم برابر است، بنابراین معادله خط مماس به‌صورت $\underbrace{x = -۱}_{(۰/۵)}$ است.



۱۱ ۱/۵

مصحح شو:

ابتدا مختصات مرکز دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۳ = ۰$ و همچنین شعاع آن را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مرکز دایره}: O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) = O(-\frac{(-۲)}{۲}, -\frac{۴}{۲}) = O(۱,-۲) \quad (۰/۵)$$

$$\text{شعاع دایره}: R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + (۴)^۲ - ۴(۳)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۱۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۸} = \sqrt{۲} \quad (۰/۵)$$

حال، فاصله خط $x - y - ۱ = ۰$ را از مرکز دایره به‌دست می‌آوریم:

$$OH = \frac{|۱-(-۲)-۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{|۱+۲-۱|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} \quad (۰/۲۵)$$

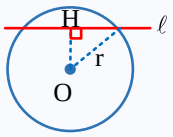
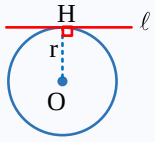
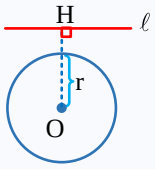
پس نتیجه می‌گیریم که چون $OH = R = \sqrt{۲}$ است، پس خط $x - y = ۱$ بر دایره مماس است. (۰/۲۵)

۲۰ثو

اوضاع نسبی خط و دایره:

برای مشخص کردن وضعیت یک خط نسبت به یک دایره قبل از هر چیز، ابتدا فاصله مرکز دایره از خط موردنظر را پیدا می‌کنیم(OH).

حال با توجه به اندازه OH و اندازه شعاع دایره، داریم:

		
خط ℓ با دایره متقاطع است.	خط ℓ بر دایره مماس است.	خط ℓ دایره را قطع نمی‌کند.
$OH < r$	$OH = r$	$OH > r$

یادآوری:

ـ خط مماس بر دایره، در نقطه تماس، بر شعاع دایره عمود است.

ـ فاصله نقطه $A(x_۰, y_۰)$ از خط به معادله $ax + by + c = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

مثال: وضعیت خط $x + y = ۱$ را نسبت به دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y - ۱ = ۰$ مشخص نمایید.

ابتدا مختصات مرکز دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) \Rightarrow O(-\frac{۲}{۲}, -\frac{۲}{۲}) \Rightarrow O(-۱,-۱)$$

شبیه ساز امتحانات نهایی

حال فاصله مرکز دایره را از خط به معادله $x+y-1=0$ به‌دست می‌آوریم:

$$OH=\frac{|(1\times-1)+(1\times-1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-3|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow OH=\frac{3\sqrt{2}}{2}\simeq 2/1$$

شعاع دایره را به‌دست آورده و آن را با اندازه OH مقایسه می‌کنیم:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+4-(-4)}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\simeq 1/7$$

چون $\frac{3\sqrt{2}}{2}>\sqrt{3}$ است، پس $OH>r$ است، در نتیجه خط $x+y=1$ دایره را قطع نمی‌کند.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(1,-1)$ و بر خط $3x-4y+3=0$ مماس باشد.

فاصله مرکز دایره تا خط داده شده برابر شعاع دایره است:

$$d=\frac{|3(1)-4(-1)+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

$$\begin{cases}O(1,-1)\\ r=2\end{cases}\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.

محل تقاطع قطرهای دایره همان مرکز دایره است:

$$\begin{cases}x+y=1\\ x-y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}\Rightarrow O(2,-1)$$

از طرفی، فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره با شعاع دایره برابر است:

$$r=\frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$$

در نتیجه معادله دایره برابر است با: $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

۱۲ — ۲/۷۵

مصحح شو:

ابتدا مختصات مرکز دایره $x^2+y^2-4x+2y-31=0$ و همچنین شعاع آن را به‌دست می‌آوریم:

مرکز دایره: $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=O(-\frac{(-4)}{2},-\frac{2}{2})=O(2,-1)$ (۰/۵)

شعاع دایره: $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(2)^2-4(-31)}=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+124}=\frac{\sqrt{144}}{2}=6$ (۰/۵)

حال، فاصله دو نقطه $O(2,-1)$ و $O'(-1,3)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$OO'=\sqrt{(-1-2)^2+(3-(-1))^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\ (0/5)$$

از طرفی، برای اینکه دو دایره مماس داخل باشند، باید $OO'=|R-R'|$ باشد، پس:

$$\underbrace{OO'=|R-R'|\Rightarrow 5=|6-R'|}_{(0/25)}\Rightarrow\begin{cases}6-R'=5\Rightarrow R'=1\ (0/25)\\ 6-R'=-5\Rightarrow R'=11\ (0/25)\end{cases}$$

دو دایره به مرکز $O'(-1,3)$ وجود دارد که با دایره $x^2+y^2-4x+2y-31=0$ مماس داخل باشد:

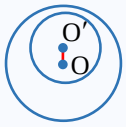
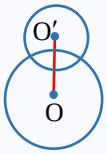
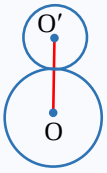
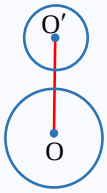
$$O'(-1,3):\begin{cases}R'=1\Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=1\ (0/25)\\ R'=11\Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=121\ (0/25)\end{cases}$$

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

۲۰ شو

اوضاع نسبی دو دایره:

دو دایره $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ را در نظر بگیرید. اگر اندازه پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند (خط‌المرکزین) برابر d باشد، داریم:

				
$d < \lvert r-r' \rvert$	$d = \lvert r-r' \rvert$	$\lvert r-r' \rvert < d < r+r'$	$d = r+r'$	$d > r+r'$
دو دایره متداخل	دو دایره مماس درون	دو دایره متقاطع	دو دایره مماس بیرون	دو دایره بیرون هم (متخارج)

توجه شود که اگر $d = ۰$ باشد، دو دایره هم‌مرکز خواهند بود.

برای تشخیص وضعیت دو دایره $C(O,r)$ و $C'(O',r')$، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع هر دو دایره را به‌دست می‌آوریم.

۲) سپس طول خط‌المرکزین دو دایره $d = \lvert OO' \rvert$ را نیز به‌دست می‌آوریم.

۳) در نهایت $(r+r')$ و $\lvert r-r' \rvert$ را نیز محاسبه کرده و آن را با اندازه $d = \lvert OO' \rvert$ مقایسه می‌کنیم.

مثال: وضعیت دو دایره $(x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$ را نسبت به هم مشخص کنید.

ابتدا مرکز و شعاع هر دو دایره را مشخص می‌کنیم:

$$(x-۱)^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} O(۱,۰) \\ r = ۱ \end{cases}$$

$$x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} O'(۰,۱) \\ r' = ۱ \end{cases}$$

حال فاصله دو مرکز را به‌دست آورده و آن را با $r+r'$ و $\lvert r-r' \rvert$ مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lvert OO' \rvert = \sqrt{۲} \\ r+r' = ۲ \\ \lvert r-r' \rvert = ۰ \end{cases} \Rightarrow \lvert r-r' \rvert < OO' < r+r' \Rightarrow$$ دو دایره متقاطع‌اند.

موفق باشید.

۲۰

شبیه‌ساز امتحانات نهایی